ВОЗВРАЩЕНИЕ К МНОГОГРАННИКУ ГОМОРИ

В.А. Шлык

Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь,
Машиностроителей 25, 220118 Минск, Беларусь
v.shlyk@gmail.com

Введение Ральфом Гомори [1] главного углового многогранника (главного многогранника Гомори) положило начало теоретико-групповому подходу в целочисленном линейном программировании. В середине 1990-х годов подтвердилась эффективность порождаемых с его помощью отсечений и оценок. С тех пор главный многогранник Гомори признан ключевым объектом в теории и практике целочисленного программирования. Автор начал изучать его по предложению Дмитрия Алексеевича Супруненко. Были доказаны новые свойства его фасет и субаддитивная характеризация фасет более общего многогранника на частичной алгебре вместо конечной абелевой группы в стандартном случае [2]. Высказанное Дмитрием Алексеевичем пожелание найти интересную интерпретацию введенного обобщенного многогранника удалось выполнить в 1996 г. — ею стал политоп разбиений чисел [3]. После описания его фасет [4] основное внимание было уделено вершинам. Главный многогранник Гомори обладает симметрией, обусловленной автоморфизмами его основной группы. Однако понять структуру множества вершин политопа разбиений чисел оказалось легче [5], поскольку части разбиений складываются обычным образом. Достигнутое понимание позволило продолжить начатое Гомори изучение вершин его многогранника, о которых после пионерской работы [1] существенных результатов получено не было. Ввиду практического значения фасет вершины выпали из поля зрения исследователей. Наиболее полно новые результаты о вершинах представлены в [6].

Далее G — конечная абелева группа, $\bar{0}$ — ее нулевой элемент, $G^+ = G \setminus \{\bar{0}\}$, $g_0 \in G$. Главным многогранником Гомори $P(G, g_0)$ (далее — ГМГ) называется выпуклая оболочка неотрицательных целочисленных решений $t = (t(g), g \in G^+)$ уравнения $\sum_{g\in G^+} t(g)g = g_0$. Множество вершин $P(G, g_0)$ обозначается $V(G, g_0)$

Гомори [1] доказал, что вершины ГМГ являются его неприводимыми точками, то есть такими $t \in P(G, g_0)$, что для любых $r = (r(g), g \in G^+)$ и $s = (s(g), g \in G^+)$ из условий $0 \le r(g) \le t(g)$, $0 \le s(g) \le t(g)$, $r \ne s$ следует неравенство $\sum_{g\in G^+} r(g)g \ne \sum_{g\in G^+} s(g)g$. Следующая теорема дает геометрическую характеризацию неприводимых точек.

Теорема 1. *Целочисленная точка $P(G, g_0)$ неприводима тогда и только тогда, когда она не является выпуклой комбинацией двух других целочисленных точек $P(G, g_0)$.*

Гомори рассматривал фасеты ГМГ как неравенства $\sum_{g\in G^+} \pi(g)t(g) \ge \pi_0$, обозначая их (π, π_0), где $\pi = (\pi(g), g \in G^+)$. Фасеты, отличные от $t(g) \ge 0$, он назвал нетривиальными. Обозначим $G_t = \{g \in G^+ | t(g) > 0\}$. Связи между вершинами ГМГ и содержащими их нетривиальными фасетами устанавливает

Теорема 2. *Пусть вершина $t \in V(G, g_0)$ лежит на нетривиальной фасете (π, π_0) и пусть $h = \sum_{g\in G^+} u(g)g$, $h \ne \bar{0}, t$, где все $u(g)$ целые, $0 \le u(g) \le t(g)$, $g \in G^+$. Тогда*

1. *точка $w = (w(g), g \in G^+)$ с компонентами $w(g) = t(g) - u(g)$, $g \in G^+$, $g \ne h$, и $w(h) = t(h) + 1$ лежит на фасете (π, π_0);*
2. *вектор коэффициентов π фасеты удовлетворяет соотношению $\pi(h) = \sum_{g\in G_t} u(g)\pi(g)$.*

Гомори доказал, что любой автоморфизм φ группы G преобразует каждую вершину $t \in V(G, g_0)$ в вершину $\bar{t} = \{\bar{t}(g), g \in G^+\} = \{t(\varphi^{-1}(g)), g \in G^+\}$ многогранника $P(G, \varphi(g_0))$. Введем две комбинаторные операции $\mu_{h,f}$ и μ_h, где $h, f \in G_t$ на $V(G, \varphi(g_0))$. Операция $\mu_{h,f}$ склеивает каждую из $k = \min(t_h, t_f)$ пар элементов h и f в элемент $h + f$, а операция μ_h склеивает t_h элементов h в элемент $t_h h$.

Теорема 3. *Если к вершине t многогранника $P(G,g_0)$ применима операция $\mu_{h,f}$ (или μ_h) с некоторыми $h,f \in G_t$, то $\mu_{h,f}(t)$ (соответственно, $\mu_h(t)$) также вершина $P(G,g_0)$ смежная вершине t.*

Отсюда следует, что все вершины $P(G,g_0)$ можно построить с помощью операций $\mu_{h,f}$ и μ_h из подмножества $S(G,g_0)$ тех вершин, которые нельзя получить из других вершин с помощью введенных μ-операций. Мы назвали их *опорными* вершинами.

Теорема 4. *Класс опорных вершин многогранников $P(G,g_0)$, $g_0 \in G$, инвариантен относительно действия*

$$\mathcal{V}(G) \times \mathrm{Aut}(G) \to \mathcal{V}(G) \ : \ (t,\varphi) \mapsto t \cdot \varphi = \bar{t},$$

группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$ группы G на множестве $\mathcal{V}(G) = \cup_{g_0 \in G} V(G,g_0)$ всех вершин всех ГМГ на группе G.

Теорема 5. *С точностью до изменения элементов h и f операции $\mu_{h,f}$ и μ_h коммутируют с автоморфизмами: $(\mu_{h,f}(t)) \cdot \varphi = \mu_{\varphi(h),\varphi(f)}(t \cdot \varphi)$ и $(\mu_h(t)) \cdot \varphi = \mu_{\varphi(h)}(t \cdot \varphi)$.*

Следующая теорема суммирует основные результаты о структуре множества вершин $V(G,g_0)$ многогранника $P(G,g_0)$. В ней операции $\mu_{\varphi(h),\varphi(f)}$ и $\mu_{\varphi(h)}$ обозначены для простоты через μ_φ, и $\mathrm{Aut}_{g_0}(G)$ — стабилизатор элемента g_0 в $\mathrm{Aut}(G)$.

Теорема 6. *Множество $V(G,g_0)$ есть непересекающееся объединение орбит относительно действия $\mathrm{Aut}_{g_0}(G)$. Для любой вершины $t \in V(G,g_0)$ и любой операции $\mu_{h,f}$ или μ_h, применимой к t, преобразование $t \cdot \varphi \mapsto \mu_\varphi(t \cdot \varphi)$, $\varphi \in \mathrm{Aut}_{g_0}(G)$, отображает орбиту вершины t на орбиту вершины $\mu(t)$. Некоторые орбиты состоят только из опорных вершин, остальные орбиты опорных вершин не содержат. Таким образом, $S(G,g_0)$ есть непересекающееся объединение орбит, состоящих из опорных вершин $P(G,g_0)$. Для $V(G,\bar{0})$ выполняются аналогичные утверждения относительно $\mathrm{Aut}(G)$.*

Из теоремы следует, что в качестве вершинного базиса $P(G,g_0)$, из которого можно построить все его остальные вершины, и который, следовательно, полностью определяет этот многогранник, можно взять любую систему представителей орбит относительно действия $\mathrm{Aut}_{g_0}(G)$ на множестве опорных вершин $S(G,g_0)$.

Теорема 7. *Диаметр каждого главного многогранника Гомори равен 2.*

В 2012 г. на Европейской конференции по исследованию операций я имел честь рассказать изложенные результаты (тогда еще не опубликованные) Ральфу Гомори. В своем докладе о роли главного многогранника в ЦЛП он, по его словам, собирался специально подчеркнуть важность изучения его вершин.

Литература

1. Gomory R. E. *Some polyhedra related to combinatorial problems* // Linear Algebra Appl. 1969. Vol. 2. P. 451–558.

2. Шлык В. А. *Субаддитивная характеризация граней многогранных множеств на частичной алгебре* // Доклады АН БССР. 1984. Т. 28. № 11. С. 980–983.

3. Шлык В. А. *Политопы разбиений чисел* // Вес. Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1996. № 3. С. 89–92.

4. Shlyk V. A. *Polytopes of partitions of numbers* // European J. Combin. 2005. Vol. 26. N 8. P. 1139–1153.

5. Shlyk V. A. *Polyhedral approach to integer partition* // J. Combin. Math. Combin. Comput. 2014. Vol. 89 (May). P. 113–128.

6. Shlyk V. A. *Master corner polyhedron: vertices* // European J. Oper. Res. 2013. Vol. 226. N. 2. P. 203–210.